Musteraufgaben zu den Mathematikmodulen

Ein Selbsttest

I. Grundlagen der Mathematik I

Stoffplan

Terme und Gleichungen, elementare Funktionen (bis zu 25 h)

- Grundsätzliches zum Vereinfachen von Termen und Lösen von Gleichungen (Grundmenge, Definitionsmenge, Lösungsmenge, Äquivalenz- umformungen, …) (2 h)
- Bruchterme und Bruchgleichungen (3 h)
- Quadratische und biquadratische Gleichungen, Substitution; Parabeln (incl. Scheitelbestimmung, quadratische Ergänzung) (4 h)
- Wurzeln, Wurzelterme, Wurzelgleichungen, Wurzelfunktion (4 h)
- Potenzgesetze, Rechnen mit Potenzen; ggf. einfache Potenzfunktionen (3 h)
- Logarithmengesetze, Rechnen mit Logarithmen; ggf. einfache Logarithmusfunktionen (3 h)
- Exponential- und Logarithmusgleichungen (3 h)
- Lineare Gleichungssysteme (einfach) (3 h)

Aufgaben

Aufgabe 1

Vereinfachen Sie die folgenden Terme so weit wie möglich:

a) $\sqrt{\dfrac{a^3b^5}{c^6}} \cdot \left(\sqrt{\dfrac{a^5c^2}{b}}\right)^{-1}$ (a, b, $c > 0$) b) $\dfrac{3}{9s^2 - t^2} + \dfrac{3s}{3s+t} - \dfrac{3s}{3s-t}$

Ergebnisse: a) $\dfrac{b^3}{a \cdot c^4}$ b) $\dfrac{3-6st}{9s^2-t^2}$

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie den Definitionsbereich sowie alle reellen Lösungen der folgenden Gleichungen:

a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ b) $\sqrt{2x-3} + 5 - 3x = 0$ c) $|2x-1| + x = 1$

d) $\log_2(x^2) - \log_2(\sqrt{x}) = 3$

Ergebnisse: a) -3;-1;1;3 b) $D = [1{,}5;\infty[$; x=2 c) 0; $\frac{2}{3}$ d) $D =]0;\infty[$; x=4

II. Grundlagen der Mathematik II (Elementare Geometrie, Trigonometrie)

Stoffplan

- Winkel, Geraden, Kreise, Dreiecke, Vielecke (3 h)
- Besondere Dreiecke und deren Eigenschaften (gleichschenklig, gleichseitig, rechtwinklig; Pythagoras, ggf. Katheten- und Höhensatz) (6 h)
- Strahlensätze, Zentrische Streckung, Ähnlichkeit von Dreiecken (3 h)
- Einführung Trigonometrie (am rechtwinkligen Dreieck); spezielle Winkel [z.B. sin(30°) = 0,5] (4 h)
- Sinus und Kosinus am Einheitskreis; Bogenmaß; Berechnung mit dem Taschenrechner; die trigonometrischen Funktionen sin, cos, tan (5 h)
- Trigonometrische Gleichungen (4 h)

Aufgabe 1

Ein gleichseitiges Dreieck habe die Kantenlänge *a*. Berechnen Sie seine Höhe in Abhängigkeit von *a*. (Ergebnis: $\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot a$)

Aufgabe 2:

Um die Erdkugel (Äquator) werde ein Kabel, das 10 m länger als der Erdumfang ist, aufgespannt und zwar so, dass alle Punkte des Kabels den gleichen Abstand von der Erdoberfläche haben. Berechnen Sie diesen Abstand (nehmen Sie dabei an, dass die Erde eine Kugel ist; schlagen Sie den (mittleren) Erdradius nach). (Ergebnis: etwa 1,6 m)

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie alle Lösungen folgenden Gleichungen (*x* im Bogenmaß)

a) $\sin x = -\frac{1}{2}$ b). $(\sin x)^2 - 2 - 2\cos x = 0$

Hinweis zu b) Verwenden Sie die Beziehung $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$

Ergebnisse: a) $\left(\frac{7}{6}+2k\right)\cdot\pi$ und $\left(\frac{11}{6}+2k\right)\cdot\pi$ mit ganzzahligem *k*

b) $(1+2k)\cdot\pi$ mit ganzzahligem *k*

Aufgabe 4:

Eine Silvesterrakete hat eine Schubkraft von 4,0 N (dabei steht N für Newton), ihre Gewichtskraft beträgt 0,55 N. Die Rakete wird horizontal abgeschossen. In welche Richtung, gemessen zur Horizontalen, zeigt die resultierende Kraft?

(Ergebnis: 7,8° von der Horizontalen aus schräg nach unten zeigend)

MINT AKADEMIE Schlau ins Studium starten

DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Heidenheim

III. Vektorrechnung und analytische Geometrie:

Stoffplan

Geraden, Ebenen etc.(bis zu 25 h)

- Einführung in die Vektorrechnung (Vektoren als Pfeile, Eigenschaften, Addition, …) (3 h)
- Vektorrechnung in der Ebene und im Anschauungsraum (Koordinaten, Komponenten, Betrag, Normierung, …) (4 h)
- Skalarprodukt, Kreuzprodukt und erste Anwendungen (4 h)
- Geraden und Ebenen (7-8 h)
- Anwendungsaufgaben (4 h)
- Falls noch Zeit ist: Kugeln (kurz; bis zu 2 h), Aufgaben und Lösungen zum Selbststudium herausgeben

Aufgabe 1

Gegeben sind die Geraden *g*: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und *h*: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ (*s* und *t* sind reelle Parameter).

a) Schneiden sich diese Geraden? Bestimmen Sie ggf. den Schnittpunkt und den Schnittwinkel.
b) Geben Sie alle Ebenen an, die senkrecht auf *g* stehen.

Ergebnisse: a) Sie schneiden sich im Punkt *S*= $(3;-2;-4)$; 90°

b) E: $\left\{ \vec{x} \in \Re^3 : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet (\vec{x} - \vec{a});\ \vec{a} \in \Re^3 \text{ beliebig} \right\}$

Aufgabe 2

Ein Massenpunkt wird durch die Kraft $\vec{F} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \mathrm{N}$ geradlinig von $P_1 = (1;\ 20;\ 3)\ \mathrm{m}$ nach $P_2 = (4;2;-1)$ m verschoben. Welche Arbeit leistet die Kraft? Welchen Winkel bildet sie mit dem Verschiebungsvektor? (Ergebnisse: 110 Nm; 57,5°)

Hinweis: Die verrichtete Arbeit berechnet sich aus dem *Skalarprodukt* zwischen Kraft und Verschiebungsvektor.

IV. Funktionen, Differentialrechnung

Stoffplan

- Grenzwerte und Stetigkeit (sehr kurz, 3 h)
- Anschauliche Hinführung auf den Ableitungsbegriff (z.B. anhand der Momentangeschwindigkeit) (2 h)
- Ableitung elementarer Funktionen (zunächst Potenzfunktionen, sin- und cos-Funktion; dann an geeigneter Stelle auch z.B. tan-, e-Funktion etc.) (4 h)
- Ableitungsregeln: „einfache“ Ableitungsregeln (wie Summe, konstanter Summand, konstanter Faktor), Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel (4 h)
- Die natürliche Exponentialfunktion (und deren Ableitung) (2 h)
- Der natürliche Logarithmus (und deren Ableitung) (2 h)
- Tangente und Normale an einem Kurvenpunkt (+ Wiederholung Geraden in Punkt-Steigungs- und Zweipunkteform) (3 h)
- Funktionsuntersuchung I (siehe auch Kurs Integralrechnung) (5 h)

Aufgaben

Werden noch eingestellt.

V. Integralrechnung

Stoffplan

- Integration als Umkehrung der Differentiation (1 h)
- Anschauliche Hinführung auf das Riemann-Integral, bestimmtes Integral (3 h)
- Unbestimmtes Integral, Hauptsatz der DI-Rechnung (3 h)
- Integration elementarer Funktionen (Potenzfunktionen, sin- und cos-Funktion, e-Funktion) (4 h)
- „Einfache“ Integrationssregeln (wie Summe, konstanter Faktor), (2 h)
- Integrationsmethoden (lineare Substitution und partielle Integration) (6 h)
- Funktionsuntersuchung II (6 h)
  (uneigentliche Integrale; nur, wenn die Zeit reicht)

Aufgabe 1

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int_1^3 (x^3 + 2\sqrt{x} - e^x - \sin(x))dx$ b) $\int \left(\frac{1}{2-3t} - \frac{1}{(1-2t)^3} \right) dt$

c) $\int_4^6 \frac{10}{u} du$

Ergebnisse: a) gerundet 6,697 c) 10 ln(1,5), gerundet 4,05

b) $-\frac{1}{3}\ln|2-3t| - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(1-2t)^2} + c$ (*c* ist eine beliebige reelle Konstante)

Aufgabe 2

Die Zu- und Abflussrate eines Wasserbeckens kann durch eine Funktion *f* mit $f(t) = -0{,}5t + 3$ angeben werden. Dabei ist *t* die Zeit in Stunden und *f(t)* die Zu-/Abflussrate in Liter pro Stunde. Zu Beginn der Beobachtung ist das Becken mit 10 Liter Wasser gefüllt. Wie viel Liter Wasser enthält dann das Becken nach einer Zeit von 9 Stunden? (Ergebnis: 16,75 Liter)